Глава 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

§ 1.1
Системы счисления

Ключевые слова:
- система счисления
- цифра
- алфавит
- позиционная система счисления
- основание
- развёрнутая форма записи числа
- свёрнутая форма записи числа
- двоичная система счисления
- восьмеричная система счисления
- шестнадцатеричная система счисления

1.1.1. Общие сведения о системах счисления

Система счисления — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел. Знаки, с помощью которых записываются числа (рис. 1.1), называются **цифрами**, а их совокупность — **алфавитом системы счисления**.

В любой системе счисления цифры служат для обозначения чисел, называемых *узловыми*; остальные числа (*алгоритмические*) получаются в результате каких-либо операций из узловых чисел.

Пример 1. У вавилонян узловыми являлись числа 1, 10, 60; в римской системе счисления узловые числа — это 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000, обозначаемые соответственно I, V, X, L, C, D, M.

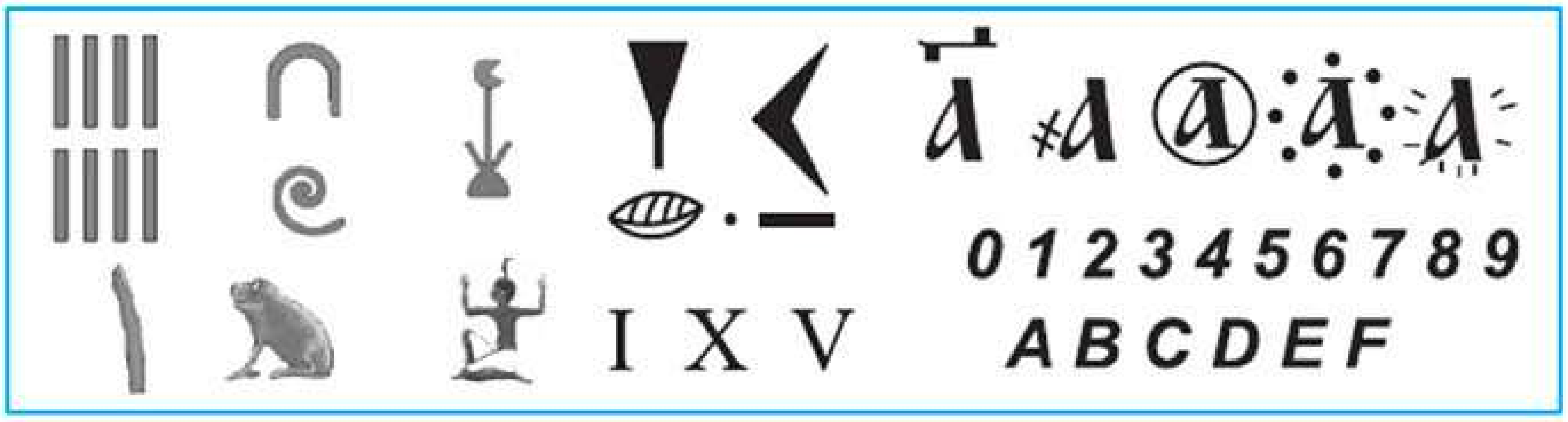


Рис. 1.1. Знаки, используемые для записи чисел в различных системах счисления

Системы счисления различаются выбором узловых чисел и способами образования алгоритмических чисел. Можно выделить следующие виды систем счисления:
1) унарная система;
2) непозиционные системы;
3) позиционные системы.

Простейшая и самая древняя система — **унарная система счисления.** В ней для записи любых чисел используется всего один символ — палочка, узелок, зарубка, камушек. Длина записи числа при таком кодировании прямо связана с его величиной, что роднит этот способ с геометрическим представлением чисел в виде отрезков. Именно унарная система лежит в фундаменте арифметики, и именно она до сих пор вводит малышей в мир счёта. Унарную систему ещё называют системой бирок.

Система счисления называется **непозиционной**, если количественный эквивалент (количественное значение) цифры в числе не зависит от её положения (позиции) в записи числа.

В большинстве непозиционных систем счисления числа образуются путём сложения узловых чисел.

Пример 2. В древнеегипетской системе счисления числа 1, 2, 3, 4, 10, 13, 40 обозначались соответственно следующим образом:

|, | |, | | |, | | | |, ∩, ∩ | | |, ∩∩∩∩

Те же числа в римской системе счисления обозначаются так: I, II, III, IV, X, XIII, XL. Здесь алгоритмические числа получаются путём сложения и вычитания узловых чисел с учётом следующего правила: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

Система счисления называется **позиционной**, если количественный эквивалент цифры зависит от её положения (позиции) в записи числа. **Основание** позиционной системы счисления равно количеству цифр, составляющих её алфавит.

Десятичная система записи чисел, которой мы привыкли пользоваться в повседневной жизни, с которой мы знакомы с детства, в которой производим все наши вычисления, — пример позиционной системы счисления. Алфавит десятичной системы составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Алгоритмические числа образуются в ней следующим образом: значения цифр умножаются на «веса» соответствующих разрядов, и все полученные произведения складываются. Это отчётливо прослеживается в числительных русского языка, например: «три-ста пять-десят семь».

Основанием позиционной системы счисления может служить любое натуральное число $q > 1$. Алфавитом позиционной системы счисления с основанием q служат числа $0, 1, \ldots, q - 1$, каждое из которых может быть записано с помощью одного уникального символа; младшей цифрой всегда является 0.

Основные достоинства любой позиционной системы счисления — простота выполнения арифметических операций и ограниченное количество символов, необходимых для записи любых чисел.

В позиционной системе счисления с основанием q любое целое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm\,(a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0). \qquad (1)$$

Здесь:

A — число;

q — основание системы счисления;

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество разрядов числа;

q^i — «вес» i-го разряда.

Запись числа по формуле (1) называется **развёрнутой формой** записи. **Свёрнутой формой** записи числа называется его представление в виде[1] $\pm\ a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$.

Пример 3. Рассмотрим десятичное число 14351. Его свёрнутая форма записи настолько привычна, что мы не замечаем, как в уме переходим к развёрнутой записи, умножая цифры числа на «веса» разрядов и складывая полученные произведения:

$$1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

1.1.2. Двоичная система счисления

Двоичной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 2. Для записи чисел в двоичной системе счисления используются только две цифры: 0 и 1.

На основании формулы (1) для целых двоичных чисел можно записать:

$$a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0 = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + ... + a_0 \cdot 2^0. \qquad (1')$$

Например:

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}.$$

Такая форма записи «подсказывает» правило перевода натуральных двоичных чисел в десятичную систему счисления: *необходимо вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа.*

Получим из формулы (1') правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления.

Разделим $a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + ... + a_0 \cdot 2^0$ на 2. Частное будет равно $a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + ... + a_1$, а остаток будет равен a_0.

Полученное частное опять разделим на 2, остаток от деления будет равен a_1.

Если продолжить этот процесс деления, то на n-м шаге получим набор цифр:

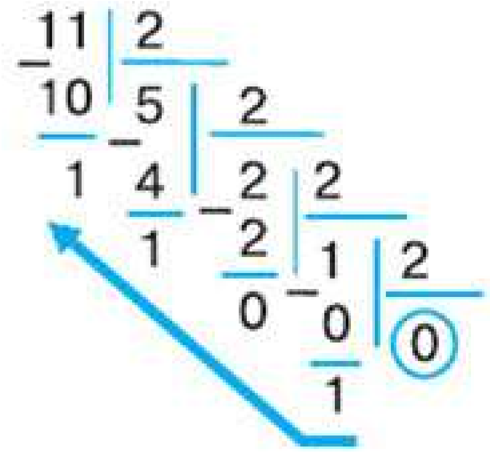
$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{n-1},$$

которые входят в двоичное представление исходного числа и совпадают с остатками при его последовательном делении на 2.

[1] Далее будут рассматриваться только положительные целые числа.

Таким образом, для перевода целого десятичного числа в двоичную систему счисления нужно последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 2 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю. Исходное число в двоичной системе счисления составляется последовательной записью полученных остатков, начиная с последнего.

<u>**Пример 4.**</u> Переведём десятичное число 11 в двоичную систему счисления. Рассмотренную выше последовательность действий (алгоритм перевода) можно изобразить так:



Выписывая остатки от деления в направлении, указанном стрелкой, получим: $11_{10} = 1011_2$.

<u>**Пример 5.**</u> Если десятичное число достаточно большое, то более удобен следующий способ записи рассмотренного выше алгоритма:

363	181	90	45	22	11	5	2	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	

$363_{10} = 101101011_2$

1.1.3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 8. Для записи чисел в восьмеричной системе счисления используются цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

На основании формулы (1) для целого восьмеричного числа можно записать:

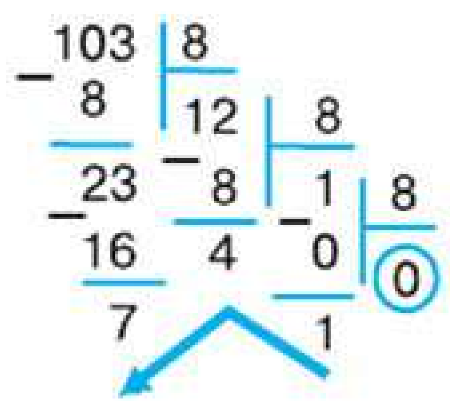
$$a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0 = a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + a_{n-2} \cdot 8^{n-2} + ... + a_0 \cdot 8^0. \qquad (1'')$$

Например: $1063_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 563_{10}$.

Таким образом, для перевода целого восьмеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развёрнутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Для перевода целого десятичного числа в восьмеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 8 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю. Исходное число в новой системе счисления составляется последовательной записью полученных остатков, начиная с последнего.

Пример 6. Переведём десятичное число 103 в восьмеричную систему счисления.



$103_{10} = 147_8$.

1.1.4. Шестнадцатеричная система счисления

Основание: $q = 16$.

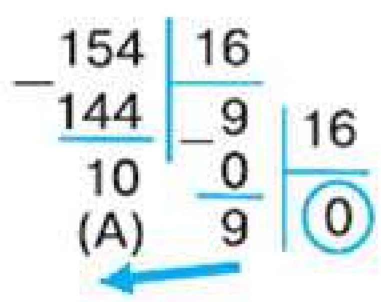
Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Здесь только десять цифр из шестнадцати имеют общеизвестное обозначение 0, ..., 9. Для записи цифр с десятичными количественными эквивалентами 10, 11, 12, 13, 14, 15 обычно используются первые пять букв латинского алфавита.

Таким образом, запись $3AF_{16}$ означает:

$$3AF_{16} = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 768 + 160 + 15 = 943_{10}.$$

Пример 7. Переведём десятичное число 154 в шестнадцатеричную систему счисления.



$154_{10} = 9A_{16}$.

1.1.5. Правило перевода целых десятичных чисел в систему счисления с основанием *q*

Для перевода целого десятичного числа в систему счисления с основанием q следует:

1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, равное нулю;
2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;
3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего полученного остатка.

Представим таблицу соответствия десятичных, двоичных, восьмеричных и шестнадцатеричных чисел от 0 до 20_{10}.

Десятичная система	Двоичная система	Восьмеричная система	Шестнадцатеричная система
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

В Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов (**http://sc.edu.ru/**) размещена интерактивная анимация «Преобразование десятичного числа в другую систему счисления» (135050). С её помощью можно понаблюдать за переводом произвольного целого числа от 0 до 512 в позиционную систему счисления, основание которой не превышает 16.

В размещённой там же виртуальной лаборатории «Цифровые весы» (135009) вы сможете освоить ещё один способ перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления — метод разностей.

1.1.6. Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Пример 8. Таблица двоичного сложения предельно проста. $1 + 1 = 10$, поэтому 0 остаётся в младшем разряде, а 1 переносится в старший разряд.

		1	0	0	1
+		1	0	1	0
	1	0	0	1	1

		1	1	1	1
+					1
	1	0	0	0	0

Пример 9. Операция умножения двоичных чисел выполняется по обычной схеме, применяемой в десятичной системе счисления, с последовательным умножением множимого на очередную цифру множителя.

			1	0	1	1
		×		1	0	1
			1	0	1	1
+	1	0	1	1		
	1	1	0	1	1	1

Таким образом, в двоичной системе счисления умножение сводится к сдвигам множимого и сложениям.

1.1.7. «Компьютерные» системы счисления

В компьютерной технике используется двоичная система счисления, обеспечивающая ряд преимуществ по сравнению с другими системами счисления:

- двоичные числа представляются в компьютере с помощью достаточно простых технических элементов с двумя устойчивыми состояниями;
- представление информации посредством только двух состояний надёжно и помехоустойчиво;
- двоичная арифметика наиболее проста;
- существует математический аппарат, обеспечивающий логические преобразования двоичных данных.

Обмен информацией между компьютерными устройствами осуществляется путём передачи двоичных кодов. Пользоваться такими кодами из-за их большой длины и зрительной однородности человеку неудобно. Поэтому специалисты (программисты, инженеры) на некоторых этапах разработки, создания, настройки вычислительных систем заменяют двоичные коды на эквивалентные им представления в восьмеричной или шестнадцатеричной системе счисления. В результате длина исходного кода сокращается в три или четыре раза соответственно. Это делает информацию более удобной для рассмотрения и анализа.

www

С помощью ресурса «Интерактивный задачник, раздел “Системы счисления”» (128659), размещённого в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов, можно проверить, насколько прочно вы усвоили изложенный в этом параграфе материал.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Система счисления — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел. Знаки, с помощью которых записываются числа, называются цифрами, а их совокупность — алфавитом системы счисления.

Система счисления называется позиционной, если количественный эквивалент цифры зависит от её положения (позиции) в записи числа. Основание позиционной системы счисления равно количеству цифр, составляющих её алфавит.

Основанием позиционной системы счисления может служить любое натуральное число $q > 1$.

В позиционной системе счисления с основанием q любое целое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm\,(a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot q^0).$$

Здесь:

A — число;

q — основание системы счисления;

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество разрядов числа;

q^i — «вес» i-го разряда.

Вопросы и задания

1. Ознакомьтесь с материалами презентации к параграфу, содержащейся в электронном приложении к учебнику. Что вы можете сказать о формах представления информации в презентации и в учебнике? Какими слайдами вы могли бы дополнить презентацию?
2. Найдите дополнительную информацию об унарной, позиционных и непозиционных системах счисления. Чем они различаются? Приведите примеры.
3. Цифры каких систем счисления приведены на рис. 1.1? Обсудите этот вопрос в группе.
4. Объясните, почему позиционные системы счисления с основаниями 5, 10, 12 и 20 называют системами счисления анатомического происхождения.
5. Как от свёрнутой формы записи десятичного числа перейти к его развёрнутой форме?
6. Запишите в развёрнутой форме числа:
   а) 143511_{10};
   б) 143511_8;
   в) 143511_{16}.
7. Вычислите десятичные эквиваленты следующих чисел:
   а) 172_8;
   б) $2EA_{16}$;
   в) 101010_2;
   г) 243_6.

8. Укажите, какое из чисел 110011_2, 111_4, 35_8 и $1B_{16}$ является:
   а) наибольшим;
   б) наименьшим.
9. Укажите минимальное основание системы счисления, в которой могут быть записаны числа 123, 222, 111, 241. Определите десятичный эквивалент данных чисел в найденной системе счисления.
10. Верны ли следующие равенства?
   а) $33_4 = 21_7$;
   б) $33_8 = 21_4$.
11. Найдите основание x системы счисления, если:
   а) $14_x = 9_{10}$;
   б) $2002_x = 130_{10}$.
12. Переведите целые числа из десятичной системы счисления в двоичную:
   а) 89;
   б) 600;
   в) 2020.
13. Переведите целые числа из десятичной системы счисления в восьмеричную:
   а) 513;
   б) 600;
   в) 2020.
14. Переведите целые числа из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную:
   а) 513;
   б) 600;
   в) 2020.
15. Заполните в тетради таблицу, в каждой строке которой одно и то же число должно быть записано в системах счисления с основаниями 2, 8, 10 и 16.

Основание 2	Основание 8	Основание 10	Основание 16
101010			
	127		
		321	
			2A

16. Выполните операцию сложения над двоичными числами:

а) 101010 + 1101;
б) 1010 + 1010;
в) 10101 + 111.

17. Выполните операцию умножения над двоичными числами:

а) 1010 · 11;
б) 111 · 101;
в) 1010 · 111.

18. В Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов найдите интерактивную презентацию «Сложение и вычитание многоразрядных двоичных чисел» (128624). С её помощью самостоятельно изучите операцию вычитания.

Выполните операцию вычитания:

а) 10101 – 101;
б) 10101 – 1101;
в) 10101 – 1111.

19. Расставьте знаки арифметических операций так, чтобы были верны следующие равенства в двоичной системе:

а) 1100 ? 11 ? 100 = 100000;
б) 1100 ? 10 ? 10 = 100;
в) 1100 ? 11 ? 100 = 0.

20. Вычислите выражения:

а) $(1111101_2 + AF_{16}) : 36_8$;
б) $125_8 + 101_2 \cdot 2A_{16} - 141_8$.
Ответ дайте в десятичной системе счисления.

21. Какими преимуществами и недостатками обладает двоичная система счисления по сравнению с десятичной?

22. Разработайте таблицы сложения и умножения для восьмеричной системы счисления.

23. Постройте граф, отражающий разновидности систем счисления.

24. Подготовьте небольшое сообщение об одной из систем счисления (когда и где применялась, какие символы использовались и т. д.). Можете воспользоваться материалами электронного приложения к учебнику.

§ 1.2
Представление чисел в компьютере

Ключевые слова:

- разряд
- беззнаковое представление целых чисел
- представление целых чисел со знаком
- представление вещественных чисел

1.2.1. Представление целых чисел

Оперативная память компьютера состоит из ячеек, каждая из которых представляет собой физическую систему, состоящую из некоторого числа однородных элементов. Эти элементы обладают двумя устойчивыми состояниями, одно из которых соответствует нулю, а другое — единице. Каждый такой элемент служит для хранения одного из битов — разряда двоичного числа. Именно поэтому каждый элемент ячейки называют **битом** или **разрядом** (рис. 1.2).

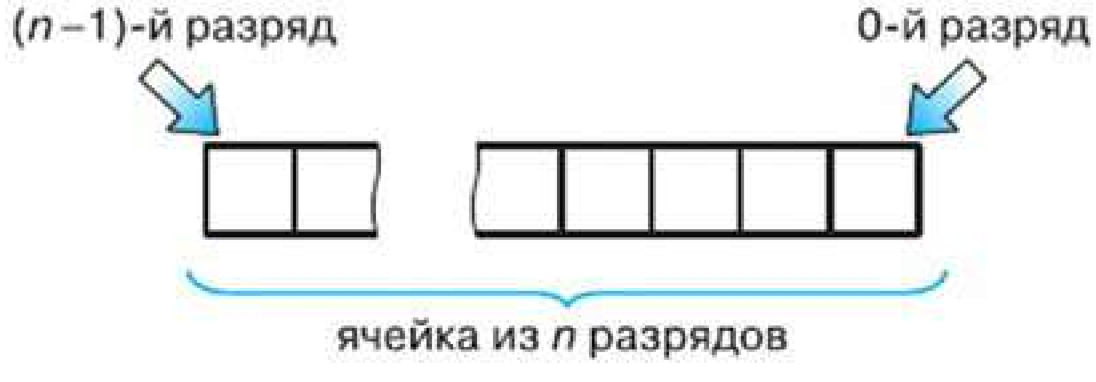


Рис. 1.2. Ячейка памяти

Для компьютерного представления целых чисел используется несколько различных способов, отличающихся друг от друга количеством разрядов (под целые числа обычно отводится 8, 16, 32 или 64 разряда) и наличием или отсутствием знакового разряда.

Беззнаковое представление можно использовать только для неотрицательных целых чисел, отрицательные числа представляются только в знаковом виде.

Беззнаковое представление используется для таких объектов, как адреса ячеек, всевозможные счётчики (например, число символов в тексте), а также числа, обозначающие дату и время, размеры графических изображений в пикселях и т. д.

Максимальное значение целого неотрицательного числа достигается в случае, когда во всех разрядах ячейки хранятся единицы. Для n-разрядного представления оно будет равно 2^n-1. Минимальное число соответствует n нулям, хранящимся в n разрядах памяти, и равно нулю.

Ниже приведены максимальные значения для беззнаковых целых n-разрядных чисел:

Количество бит	Минимальное значение	Максимальное значение
8	0	255 ($2^8 - 1$)
16	0	65 535 ($2^{16} - 1$)
32	0	4 294 967 295 ($2^{32} - 1$)
64	0	18 446 744 073 709 551 615 ($2^{64} - 1$)

Для получения компьютерного представления беззнакового целого числа достаточно перевести число в двоичную систему счисления и дополнить полученный результат слева нулями до нужной разрядности.

Пример 1. Число $53_{10} = 110101_2$ в восьмиразрядном представлении имеет вид:

0	0	1	1	0	1	0	1

Это же число 53 в шестнадцати разрядах будет записано следующим образом:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1

При представлении со знаком самый старший (левый) разряд отводится под знак числа, остальные разряды — под само число. Если число положительное, то в знаковый разряд помещается 0, если число отрицательное, то 1. Такое представление чисел называется **прямым кодом.** В компьютере прямые коды используются для хранения положительных чисел в запоминающих устройствах, для выполнения операций с положительными числами.

На сайте Федерального центра информационно-образовательных ресурсов (**http://fcior.edu.ru/**) размещён информационный модуль «Число и его компьютерный код». С помощью этого ресурса вы можете получить дополнительную информацию по изучаемой теме.

Для выполнения операций с отрицательными числами используется **дополнительный код**, позволяющий заменить операцию вычитания сложением. Узнать алгоритм образования дополнительного кода вы можете с помощью информационного модуля «Дополнительный код», размещённого на сайте Федерального центра информационно-образовательных ресурсов (**http://fcior.edu.ru/**).

1.2.2. Представление вещественных чисел

Любое вещественное число A может быть записано в экспоненциальной форме:

$$A = \pm m \cdot q^p,$$

где:

m — мантисса числа;

q — основание системы счисления;

p — порядок числа.

Например, число 472 000 000 может быть представлено так: $4{,}72 \cdot 10^8$, $47{,}2 \cdot 10^7$, $472{,}0 \cdot 10^6$ и т. д.

С экспоненциальной формой записи чисел вы могли встречаться при выполнении вычислений с помощью калькулятора, когда в качестве ответа получали записи следующего вида: 4.72E+8.

Здесь знак «E» обозначает основание десятичной системы счисления и читается как «умножить на десять в степени».

Из приведённого выше примера видно, что положение запятой в записи числа может изменяться.

Для единообразия мантиссу можно записывать как правильную дробь, имеющую после запятой цифру, отличную от нуля. В этом случае число 472 000 000 будет представлено как $0{,}472 \cdot 10^9$.

Вещественное число может занимать в памяти компьютера 32 или 64 разряда. При этом выделяются разряды для хранения знака мантиссы, знака порядка, порядка и мантиссы.

Пример:

<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="8">Знак и порядок</td><td colspan="24">Знак и мантисса</td></tr>
</table>

Диапазон представления вещественных чисел определяется количеством разрядов, отведённых для хранения порядка числа, а точность определяется количеством разрядов, отведённых для хранения мантиссы.

Максимальное значение порядка числа для приведённого выше примера составляет $1111111_2 = 127_{10}$, и, следовательно, максимальное значение числа:

$$0{,}11111111111111111111111 \cdot 10^{1111111}$$

Попытайтесь самостоятельно выяснить, каков десятичный эквивалент этой величины.

Широкий диапазон представления вещественных чисел важен для решения научных и инженерных задач. Вместе с тем следует понимать, что алгоритмы обработки таких чисел более трудоёмки по сравнению с алгоритмами обработки целых чисел.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Для компьютерного представления целых чисел используются несколько различных способов, отличающихся друг от друга количеством разрядов (8, 16, 32 или 64) и наличием или отсутствием знакового разряда.

Для представления беззнакового целого числа его следует перевести в двоичную систему счисления и дополнить полученный результат слева нулями до нужной разрядности.

При представлении со знаком самый старший разряд отводится под знак числа, остальные разряды — под само число. Если число положительное, то в знаковый разряд помещается 0, если число отрицательное, то 1. Положительные числа хранятся в компьютере в прямом коде, отрицательные — в дополнительном.

При хранении в компьютере вещественных чисел выделяются разряды на хранение знака порядка числа, самого порядка, знака мантиссы и мантиссы. При этом любое число записывается так:

$$A = \pm m \cdot q^p,$$

где:

m — мантисса числа;

q — основание системы счисления;

p — порядок числа.

Вопросы и задания

1. Ознакомьтесь с материалами презентации к параграфу, содержащейся в электронном приложении к учебнику. Используйте эти материалы при подготовке ответов на вопросы и выполнении заданий.
2. Как в памяти компьютера представляются целые положительные и целые отрицательные числа?
3. Любое целое число можно рассматривать как вещественное, но с нулевой дробной частью. Обоснуйте целесообразность наличия особых способов компьютерного представления целых чисел.
4. Представьте число 63_{10} в беззнаковом 8-разрядном формате.
5. Найдите десятичные эквиваленты чисел по их прямым кодам, записанным в 8-разрядном формате со знаком:
   а) 01001100;
   б) 00010101.
6. Какие из чисел 443_8, 101010_2, 256_{10} можно сохранить в 8-разрядном формате?
7. Запишите следующие числа в естественной форме:
   а) $0{,}3800456 \cdot 10^2$;
   б) $0{,}245 \cdot 10^{-3}$;
   в) 1,256900E+5;
   г) 9,569120E–3.
8. Запишите число $2010{,}0102_{10}$ пятью различными способами в экспоненциальной форме.
9. Запишите следующие числа в экспоненциальной форме с нормализованной мантиссой — правильной дробью, имеющей после запятой цифру, отличную от нуля:
   а) $217{,}934_{10}$;
   б) 75321_{10};
   в) $0{,}00101_{10}$.
10. Изобразите схему, связывающую основные понятия, рассмотренные в данном параграфе.

§ 1.3 Элементы теории множеств и комбинаторики

Ключевые слова:
- множество
- подмножество
- объединение множеств
- пересечение множеств
- дополнение
- количество вариантов
- правило суммы
- правило произведения

1.3.1. Множество

С понятием множества вы все встречались на уроках математики ещё в начальной школе; работали с ним при изучении математики и информатики в 5–6 классах.

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Примерами множеств могут служить множество всех учеников вашего класса, множество всех жителей Санкт-Петербурга, множество всех натуральных чисел, множество всех решений некоторого уравнения и т. п.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, ...). Объекты, входящие в состав множества, называются его элементами.

Множество можно задать следующими способами:
1) перечислением всех его элементов;
2) характеристическим свойством элементов множества.

В первом случае внутри фигурных скобок перечисляются все объекты, составляющие множество. Каждый объект, входящий в множество, указывается в фигурных скобках лишь один раз.

Например, запись $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ означает, что множество М состоит из чисел 1, 3, 5, 7 и 9. Точно такой же смысл будет иметь запись $M = \{3, 1, 5, 9, 7\}$. Иначе говоря, порядок расположения элементов в фигурных скобках значения не имеет; важно точно указать, какие именно объекты являются элементами множества.

Например:
- число 5 является элементом множества M; это записывается так: $5 \in M$[1];
- число 4 НЕ является элементом множества M; это записывается так: $5 \notin M$.

Это же множество можно задать с помощью характеристического свойства образующих его элементов — такого свойства, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. В нашем примере можно говорить о множестве натуральных однозначных нечётных чисел.

В рассматриваемом множестве M содержится 5 элементов. Это обозначают так: $|M| = 5$. Можно составить множество, содержащее любое число элементов. Например, множество всех корней уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$ конечно (два элемента), а множество всех точек прямой бесконечно. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Первый способ задания множеств применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Вторым способом можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

Из некоторых элементов множества M можно составить новое множество, например P:

$$P = \{1, 3, 5\}.$$

Каждый элемент множества P принадлежит множеству M. В таком случае говорят, что P есть **подмножество** M, и записывают: $P \subset M$.

[1] Символ $\in$ называется знаком принадлежности.

Само множество M является своим подмножеством, так как каждый элемент M принадлежит множеству M. Пустое множество также является подмножеством M.

Попробуйте самостоятельно сосчитать, сколько всего подмножеств можно составить из элементов нашего множества M. Учтите все одноэлементные, двухэлементные, трёхэлементные, четырёхэлементные подмножества, а также само множество M и пустое множество.

Для наглядного изображения множеств используются круги Эйлера (рис. 1.3). Элементы множества изображаются точками внутри круга.

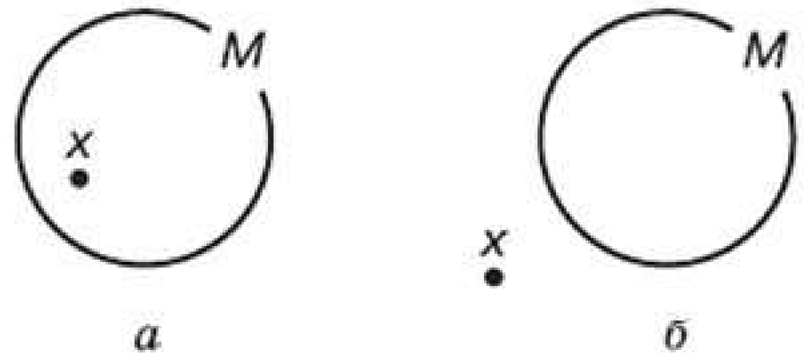


Рис. 1.3. Графическое изображение множества M: *а* — $x \in M$, *б* — $x \notin M$.

1.3.2. Операции над множествами

Над множествами, как и над числами, производят некоторые операции.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Пересечение множеств обозначают с помощью знака $\cap$: $X \cap Y$. На рисунке 1.4 заштриховано множество $X \cap Y$.

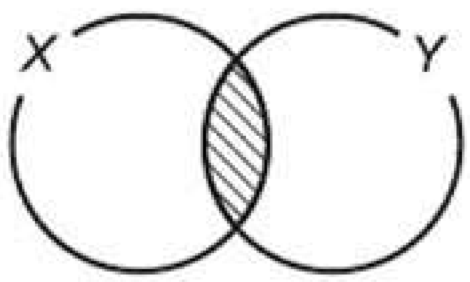


Рис. 1.4. Графическое изображение множества $X \cap Y$.

Пусть множества X и Y состоят из букв:

$X = \{$ш, к, о, л, а$\}$;
$Y = \{$у, р, о, к$\}$.

Эти множества имеют общие элементы к и о:

$X \cap Y = \{к, о\}$.

Множества M и X не имеют общих элементов, их пересечение — пустое множество:

$M \cap X = \varnothing$.

Пересечение множеств M и P есть множество P; пересечение множеств M и M есть множество M:

$M \cap P = P$,
$M \cap M = M$.

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Объединение множеств обозначают с помощью знака $\cup$: $X \cup Y$.

На рисунке 1.5 заштриховано множество $X \cup Y$.

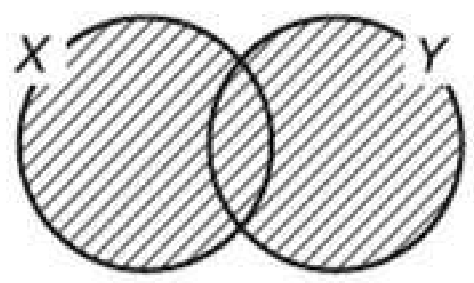


Рис. 1.5. Графическое изображение множества $X \cup Y$.

Для наших примеров:

$X \cup Y = \{ш, к, о, л, а, у, р\}$, $M \cup X = \{1, 3, 5, 7, 9, ш, к, о, л, а\}$,
$M \cup P = M$, $M \cup M = M$.

Число элементов объединения двух множеств с пустым пересечением равно сумме чисел элементов этих множеств. Так, в объединении множеств M и X содержится 10 элементов: $|M \cup X| = 10$.

Если же множества пересекаются, то число элементов объединения находится сложнее. Так, множество X состоит из 5 элементов, множество Y — из 4, а их объединение — из 7. Сложение чисел 5 и 4 даёт нам число 9. Но в эту сумму дважды вошло число элементов пересечения. Чтобы получить правильный результат, надо к числу элементов X прибавить число элементов Y и из суммы вычесть число элементов пересечения. Полученная формула годится для любых двух множеств:

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Подумайте, возможно ли равенство: $A \cup B = A \cap B$.

Пересечение и объединение выполняются для любой пары множеств. Третья операция — дополнение — имеет смысл не для всех множеств, а только тогда, когда второе множество является подмножеством первого.

Пусть множество P является подмножеством множества M. **Дополнением** P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

Дополнение P до M обозначают $\overline{P}$:

$\overline{P} = \{7, 9\}$.

Дополнение M до M есть пустое множество, дополнение пустого множества до M есть M:

$\overline{M} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = M$.

1.3.3. Правила суммы и произведения

Представителям самых разных профессий приходится решать **комбинаторные задачи** — задачи, связанные с рассмотрением тех или иных комбинаций (вариантов) из элементов конечных множеств. Это задачи составления расписания, распределения обязанностей, выбора маршрута и многие другие.

Рассмотрим два множества: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, не имеющие общих элементов. Сколькими способами можно выбрать объект, принадлежащий либо X, либо Y?

Для множеств X и Y справедливо: $|X \cup Y| = |X| + |Y| = n + m$. Это утверждение в комбинаторике называют правилом суммы.

Правило суммы. Если выбор некоторого объекта может быть осуществлен n различными способами, а выбор другого объекта — m различными способами, отличными от предыдущих, то число способов, которыми можно осуществить выбор какого-нибудь одного из этих объектов, равно сумме $n + m$.

Задача 1. Имеются p дорог, ведущих из C в D через A, и q дорог, ведущих из C в D через B. При этом A и B дорогами не связаны. Сколько разных вариантов маршрутов из C в D следует проанализировать, чтобы выбрать из них самый короткий?

Решение

Согласно правилу суммы, надо проанализировать $p + q$ дорог.

§ 1.4
Элементы алгебры логики

Ключевые слова:
- алгебра логики
- высказывание
- логическая операция
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- логическое выражение
- таблица истинности
- законы логики

1.4.1. Высказывание

Алгебра в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами. Многие математические объекты (целые и рациональные числа, многочлены, векторы, множества) вы изучаете в школьном курсе алгебры, где знакомитесь с такими разделами математики, как алгебра чисел, алгебра многочленов, алгебра множеств и т. д.

Для информатики важен раздел математики, называемый **алгеброй логики**; объектами алгебры логики являются высказывания.

Высказывание — это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.

Например, относительно предложений «*Великий русский учёный М. В. Ломоносов родился в 1711 году*» и «*Two plus six is eight*» можно однозначно сказать, что они истинны. Предложение «*Зимой воробьи впадают в спячку*» ложно. Следовательно, эти предложения являются высказываниями.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями. Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием.

Например, предложение «*Это предложение является ложным*» не является высказыванием, так как относительно него нельзя сказать, истинно оно или ложно, без того чтобы не получить противоречие. Действительно, если принять, что предложение истинно, то это противоречит сказанному. Если же принять, что предложение ложно, то отсюда следует, что оно истинно.

Относительно предложения «*Компьютерная графика — самая интересная тема в курсе школьной информатики*» также нельзя однозначно сказать, истинно оно или ложно. Подумайте сами почему.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

Например, не являются высказываниями такие предложения, как: «*Запишите домашнее задание*», «*Как пройти в библиотеку?*», «*Кто к нам пришёл?*».

Высказывания могут строиться с использованием знаков различных формальных языков — математики, физики, химии и т. п.

Примерами высказываний могут служить:
1) «*Na — металл*» (истинное высказывание);
2) «*Второй закон Ньютона выражается формулой* $F = m \cdot a$» (истинное высказывание);
3) «*Периметр прямоугольника с длинами сторон* a *и* b *равен* $a \cdot b$» (ложное высказывание).

Не являются высказываниями числовые выражения, но из двух числовых выражений можно составить высказывание, соединив их знаками равенства или неравенства. Например:

1) «$3 + 5 = 2 \cdot 4$» (истинное высказывание);
2) «II + VI > VIII» (ложное высказывание).

Не являются высказываниями и равенства или неравенства, содержащие переменные (предложения с переменными). Например, предложение «$X < 12$» становится высказыванием только при замене переменной каким-либо конкретным значением: «$5 < 12$» — истинное высказывание; «$12 < 12$» — ложное высказывание. Множество тех значений переменной, при которых получаются истинные высказывания, называют областью истинности предложения с переменной.

Обоснование истинности или ложности высказываний решается теми науками, к сфере которых они относятся. Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Её интересует только, истинно или ложно данное высказывание. В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными.** При этом если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ($A = 1$), а если ложно — нулём ($B = 0$). 0 и 1, обозначающие значения логических переменных, называются **логическими значениями.**

Алгебра логики определяет правила записи, упрощения и преобразования высказываний и вычисления их значений.

Оперируя логическими переменными, которые могут быть равны только 0 или 1, алгебра логики позволяет свести обработку информации к операциям с двоичными данными. Именно аппарат алгебры логики положен в основу компьютерных устройств хранения и обработки данных. С применением элементов алгебры логики вы будете встречаться и во многих других разделах информатики.

1.4.2. Логические операции

Высказывания бывают простые и составные. Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием. **Составные** (сложные) высказывания строятся из простых с помощью **логических операций.**

Рассмотрим основные логические операции, определённые над высказываниями. Каждой из них соответствует связка, употребляемая в естественном языке:

Название логической операции	Логическая связка
Инверсия	«не»; «неверно, что»
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»

Конъюнкция

Рассмотрим два высказывания: A = «*Основоположником алгебры логики является Джордж Буль*», B = «*Исследования Клода Шеннона позволили применить алгебру логики в вычислительной технике*». Очевидно, новое высказывание «*Основоположником алгебры логики является Джордж Буль, и исследования Клода Шеннона позволили применить алгебру логики в вычислительной технике*» истинно только в том случае, когда одновременно истинны оба исходных высказывания.

Самостоятельно установите истинность или ложность трёх рассмотренных выше высказываний.

Конъюнкция — логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Для записи конъюнкции используются следующие знаки: И, $\wedge$, $\cdot$, $\times$, &. Например: A И B, $A \wedge B$, $A \cdot B$, $A \times B$, A & B.

Конъюнкцию можно описать в виде таблицы, которую называют **таблицей истинности:**

A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В таблице истинности перечисляются все возможные значения исходных высказываний (столбцы A и B), причём соответствующие им двоичные числа, как правило, располагают в порядке возрастания: 00, 01, 10, 11. В последнем столбце записан результат выполнения логической операции для соответствующих операндов.

Конъюнкцию также называют логическим умножением. Подумайте почему.

Дизъюнкция

Рассмотрим два высказывания: A = «*Идея использования в логике математической символики принадлежит Готфриду Вильгельму Лейбницу*», B = «*Лейбниц является основоположником бинарной арифметики*». Очевидно, новое высказывание «*Идея использования в логике математической символики принадлежит Готфриду Вильгельму Лейбницу или Лейбниц является основоположником бинарной арифметики*» ложно только в том случае, когда одновременно ложны оба исходных высказывания.

Самостоятельно установите истинность или ложность трёх рассмотренных выше высказываний.

Дизъюнкция — логическая операция, которая двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Для записи дизъюнкции используются следующие знаки: ИЛИ, $\vee$, $|$, $+$. Например: A ИЛИ B, $A \vee B$, $A \mid B$, $A + B$.

Дизъюнкция определяется следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкцию также называют логическим сложением. Подумайте почему.

Инверсия

Инверсия — логическая операция, которая высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Для записи инверсии используются следующие знаки: НЕ, $\neg$, $\overline{}$. Например: НЕ A, $\neg A$, $\overline{A}$.

Инверсия определяется следующей таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Инверсию также называют логическим отрицанием.

Отрицанием высказывания «*У меня дома есть компьютер*» будет высказывание «*Неверно, что у меня дома есть компьютер*» или, что в русском языке то же самое, «*У меня дома нет компьютера*». Отрицанием высказывания «*Я не знаю китайский язык*» будет высказывание «*Неверно, что я не знаю китайский язык*» или, что в русском языке то же самое, «*Я знаю китайский язык*». Отрицанием высказывания «*Все юноши 8-х классов — отличники*» является высказывание «*Неверно, что все юноши 8-х классов — отличники*», другими словами, «*Не все юноши 8-х классов — отличники*».

Таким образом, при построении отрицания к простому высказыванию либо используется речевой оборот «неверно, что ...», либо отрицание строится к сказуемому, тогда к соответствующему глаголу добавляется частица «не».

Любое составное высказывание можно записать в виде **логического выражения** — выражения, содержащего логические переменные, знаки логических операций и скобки. Логические операции в логическом выражении выполняются в следующей очерёдности: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Изменить порядок выполнения операций можно с помощью расстановки скобок.

Логические операции при выполнении имеют следующий приоритет: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Пример 1. Пусть A = «*На веб-странице встречается слово "крейсер"*», B = «*На веб-странице встречается слово "линкор"*». Рассматривается некоторый сегмент сети Интернет, содержащий 5 000 000 веб-страниц. В нём высказывание A истинно для 4800 страниц, высказывание B — для 4500 страниц, а высказывание $A \vee B$ — для 7000 страниц. Для какого количества веб-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) НЕ (A ИЛИ B);
б) A & B;
в) *На веб-странице встречается слово "крейсер" И не встречается слово "линкор"*.

Решение

Изобразим множество всех веб-страниц рассматриваемого сектора сети Интернет кругом, внутри которого разместим два круга: одному из них соответствует множество веб-страниц, где истинно высказывание A, второму — где истинно высказывание B (рис. 1.8).

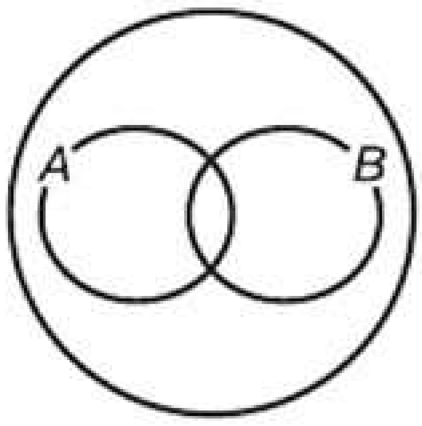


Рис. 1.8. Графическое изображение множеств веб-страниц

Изобразим графически множества веб-страниц, для которых истинны выражения и высказывание а) – в) (рис. 1.9).

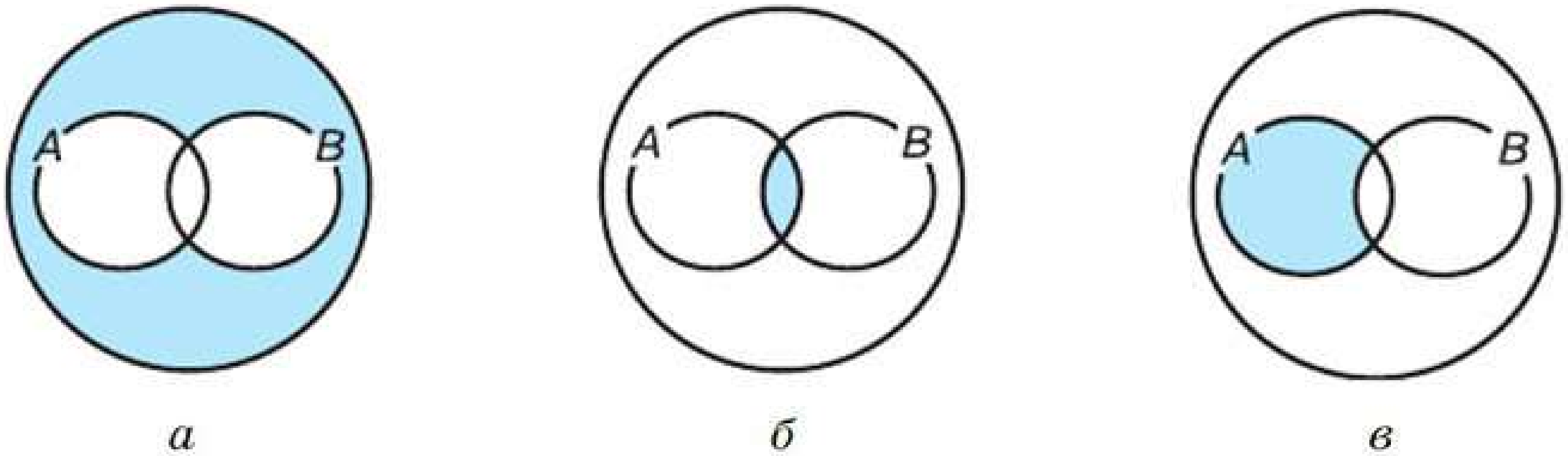


Рис. 1.9. Графические изображения множеств веб-страниц, для которых истинны выражения и высказывание а) – в)

Построенные схемы (круги Эйлера) помогут нам ответить на вопросы, содержащиеся в задании.

Выражение A ИЛИ B истинно для 7000 веб-страниц, а всего страниц 5 000 000. Следовательно, выражение A ИЛИ B ложно для 4 993 000 веб-страниц. Иначе говоря, для 4 993 000 веб-страниц истинно выражение НЕ (A ИЛИ B).

Выражение $A \vee B$ истинно для тех веб-страниц, где истинно A (4800), а также тех веб-страниц, где истинно B (4500). Если бы все веб-страницы были различны, то выражение $A \vee B$ было бы истинно для 9300 (4800 + 4500) веб-страниц. Но, согласно условию, таких веб-страниц всего 7000. Это значит, что на 2300 (9300 – 7000) веб-страницах встречаются оба слова одновременно. Следовательно, выражение A & B истинно для 2300 веб-страниц.

Решите эту же задачу, воспользовавшись формулой для вычисления количества элементов объединения двух множеств.

Чтобы выяснить, для скольких веб-страниц истинно высказывание A и одновременно ложно высказывание B, следует из 4800 вычесть 2300. Таким образом, высказывание «*На веб-странице встречается слово "крейсер" И не встречается слово "линкор"*» истинно на 2500 веб-страницах.

Самостоятельно запишите логическое выражение, соответствующее рассмотренному выше высказыванию.

www

На сайте Федерального центра информационно-образовательных ресурсов (**http://fcoir.edu.ru/**) размещён информационный модуль «Высказывание. Простые и сложные высказывания. Основные логические операции». Знакомство с этим ресурсом позволит вам расширить представления по изучаемой теме.

1.4.3. Построение таблиц истинности для логических выражений

Для логического выражения можно построить таблицу истинности, показывающую, какие значения принимает выражение при всех наборах значений входящих в него переменных. Для построения таблицы истинности следует:

1) подсчитать n — число переменных в выражении;
2) подсчитать общее число логических операций в выражении;
3) установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов;

4) определить число столбцов в таблице: число переменных + число операций;
5) заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции в соответствии с последовательностью, установленной в п. 3;
6) определить число строк в таблице (не считая шапки таблицы): $m = 2^n$;
7) выписать наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой ряд целых n-разрядных двоичных чисел от 0 до $2^n - 1$;
8) провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Построим таблицу истинности для логического выражения $A \vee A \& B$. В нём две переменные, две операции, причём сначала выполняется конъюнкция, а затем — дизъюнкция. Всего в таблице будет четыре столбца:

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$

Наборы входных переменных — это целые числа от 0 до 3, представленные в двухразрядном двоичном коде: 00, 01, 10, 11. Заполненная таблица истинности имеет вид:

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Обратите внимание, что последний столбец (результат) совпал со столбцом A. В таком случае говорят, что логическое выражение $A \vee A \& B$ **равносильно** логической переменной A.

1.4.4. Свойства логических операций

Рассмотрим основные свойства логических операций, называемые также **законами алгебры логики**.

1. **Переместительный (коммутативный) закон:**
   - для логического умножения:

$$A \,\&\, B = B \,\&\, A;$$

   - для логического сложения:

$$A \vee B = B \vee A.$$

2. **Сочетательный (ассоциативный) закон:**
   - для логического умножения:

$$(A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, (B \,\&\, C);$$

   - для логического сложения:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C).$$

При одинаковых знаках операций скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

3. **Распределительный (дистрибутивный) закон:**
   - для логического умножения:

$$A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C);$$

   - для логического сложения:

$$A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C).$$

4. **Закон двойного отрицания:**

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Двойное отрицание исключает отрицание.

5. **Закон исключённого третьего:**
   - для логического умножения:

$$A \,\&\, \overline{A} = 0;$$

   - для логического сложения:

$$A \vee \overline{A} = 1.$$

Из двух противоречивых высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.

6. **Закон повторения:**
   - для логического умножения:

$$A \,\&\, A = A;$$

- для логического сложения:

$$A \vee A = A.$$

7. **Законы операций с 0 и 1:**
   - для логического умножения:

$$A \& 0 = 0;\ A \& 1 = A;$$

   - для логического сложения:

$$A \vee 0 = A;\ A \vee 1 = 1.$$

8. **Законы общей инверсии:**
   - для логического умножения:

$$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B};$$

   - для логического сложения:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}.$$

Законы алгебры логики могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Докажем распределительный закон для логического сложения:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C).$$

A	B	C	$B \& C$	$A \vee (B \& C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Совпадение значений в столбцах, соответствующих логическим выражениям в левой и правой частях равенства, доказывает справедливость распределительного закона для логического сложения.

Пример 2. Найдём значение логического выражения $(X < 3)\ \&\ \overline{(X < 2)}$ при $X = 0$.

Решение

При $X = 0$ получаем следующее высказывание: $(0 < 3)\ \&\ \overline{(0 < 2)}$. Так как высказывания $0 < 3$, $0 < 2$ истинны, то, подставив их значения, получаем: $1\ \&\ \overline{1} = 1\ \&\ 0 = 0$.

1.4.5. Решение логических задач

Рассмотрим несколько способов решения логических задач.

Задача 1. Коля, Вася и Серёжа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину вазу. На вопрос, кто разбил вазу, они дали такие ответы:

Серёжа: 1) Я не разбивал; 2) Вася не разбивал.

Вася: 3) Серёжа не разбивал; 4) Вазу разбил Коля.

Коля: 5) Я не разбивал; 6) Вазу разбил Серёжа.

Бабушка знала, что один из её внуков, назовём его правдивым, оба раза сказал правду; второй, назовём его шутником, оба раза сказал неправду; третий, назовём его хитрецом, один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца. Кто из внуков разбил вазу?

Решение

Пусть K = «*Коля разбил вазу*», B = «*Вася разбил вазу*», C = «*Серёжа разбил вазу*». Для решения задачи можно составить таблицу истинности, в которой представить все возможные варианты высказываний каждого мальчика. Но так как ваза разбита одним внуком, то, чтобы выяснить, кто именно это сделал, достаточно фрагмента таблицы истинности, содержащего наборы значений входных переменных: 001, 010, 100.

K	B	C	Утверждения Серёжи		Утверждения Васи		Утверждения Коли		
			$\overline{C}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	K	$\overline{K}$	C	
0	0	1	0	1	0	0	1	1	✓
0	1	0	1	0	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	0	

Исходя из того, что знает о внуках бабушка, следует искать в таблице строку, содержащую в каком-либо порядке три комбинации значений: 00 (слова шутника), 11 (слова правдивого внука), 01 или 10 (слова хитреца). Такая строка отмечена галочкой. Согласно этой строке, вазу разбил Серёжа, он же оказался хитрецом. Шутником оказался Вася. Имя правдивого внука — Коля.

Задача 2. В соревнованиях по гимнастике участвуют Алла, Валя, Сима и Даша. Болельщики высказали предположения о возможных победителях:

1) Сима будет первой, Валя — второй;
2) Сима будет второй, Даша — третьей;
3) Алла будет второй, Даша — четвёртой.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом из предположений только одно из высказываний истинно, другое ложно. Какое место на соревнованиях заняла каждая из девушек, если все они оказались на разных местах?

Решение

Рассмотрим простые высказывания:
$С_1$ = «*Сима заняла первое место*»;
$В_2$ = «*Валя заняла второе место*»;
$С_2$ = «*Сима заняла второе место*»;
$Д_3$ = «*Даша заняла третье место*»;
$А_2$ = «*Алла заняла второе место*»;
$Д_4$ = «*Даша заняла четвёртое место*».

Так как в каждом из трёх предположений одно из высказываний истинно, а другое ложно, то можно заключить следующее:

1) $С_1 + В_2 = 1,\ С_1 \cdot В_2 = 0;$
2) $С_2 + Д_3 = 1,\ С_2 \cdot Д_3 = 0;$
3) $А_2 + Д_4 = 1,\ А_2 \cdot Д_4 = 0.$

Логическое произведение истинных высказываний будет истинным:

$$(С_1 + В_2) \cdot (С_2 + Д_3) \cdot (А_2 + Д_4) = 1.$$

На основании распределительного закона преобразуем левую часть этого выражения:

$$(С_1 \cdot С_2 + С_1 \cdot Д_3 + В_2 \cdot С_2 + В_2 \cdot Д_3) \cdot (А_2 + Д_4) = 1.$$

Высказывание $С_1 \cdot С_2$ означает, что Сима заняла и первое, и второе места. Согласно условию задачи, это высказывание ложно. Ложным является и высказывание $В_2 \cdot С_2$. Учитывая закон операций с константой 0, запишем:

$$(С_1 \cdot Д_3 + В_2 \cdot Д_3) \cdot (А_2 + Д_4) = 1.$$

Дальнейшее преобразование левой части этого равенства и исключение заведомо ложных высказываний дают:

$$C_1 \cdot Д_3 \cdot A_2 + C_1 \cdot Д_3 \cdot Д_4 + B_2 \cdot Д_3 \cdot A_2 + B_2 \cdot Д_3 \cdot Д_4 = 1.$$

$$C_1 \cdot Д_3 \cdot A_2 = 1.$$

Из последнего равенства следует, что $C_1 = 1$, $Д_3 = 1$, $A_2 = 1$. Это означает, что Сима заняла первое место, Алла — второе, Даша — третье. Следовательно, Валя заняла четвёртое место.

www

Познакомиться с другими способами решения логических задач, а также принять участие в интернет-олимпиадах и конкурсах по их решению вы сможете на российской странице международного математического конкурса «Кенгуру» (**http://mathkang.ru/**).
На сайте **http://www.kaser.com/** вы сможете скачать демонстрационную версию очень полезной, развивающей логику и умение рассуждать логической головоломки Шерлок.

1.4.6. Логические элементы

Алгебра логики — раздел математики, играющий важную роль в конструировании автоматических устройств, разработке аппаратных и программных средств информационных и коммуникационных технологий.

Вы уже знаете, что любая информация может быть представлена в дискретной форме — в виде фиксированного набора отдельных значений. Устройства, которые обрабатывают такие значения (сигналы), называются дискретными. Дискретный преобразователь, который выдаёт после обработки двоичных сигналов значение одной из логических операций, называется **логическим элементом.**

На рисунке 1.10 приведены условные обозначения (схемы) логических элементов, реализующих логическое умножение, логическое сложение и инверсию.

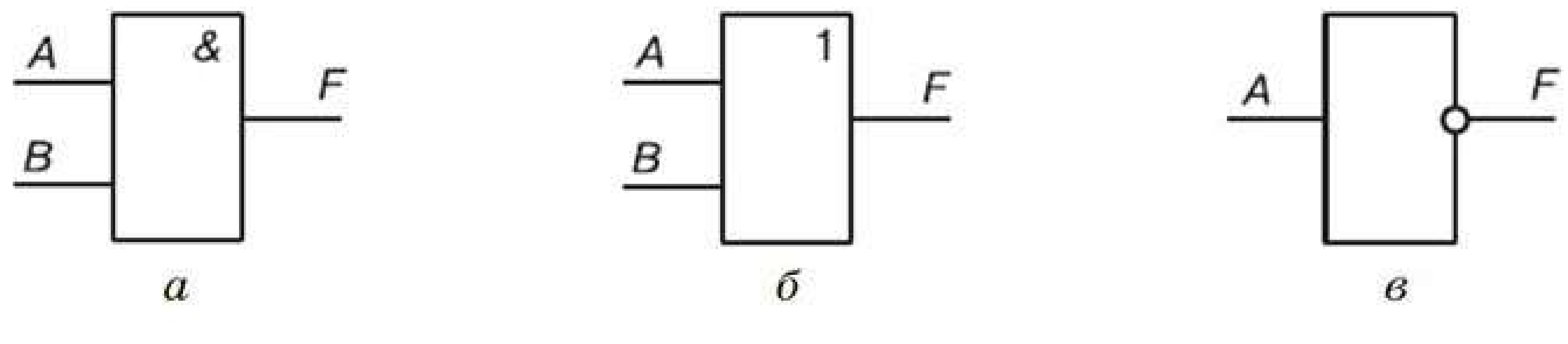


Рис. 1.10. Логические элементы

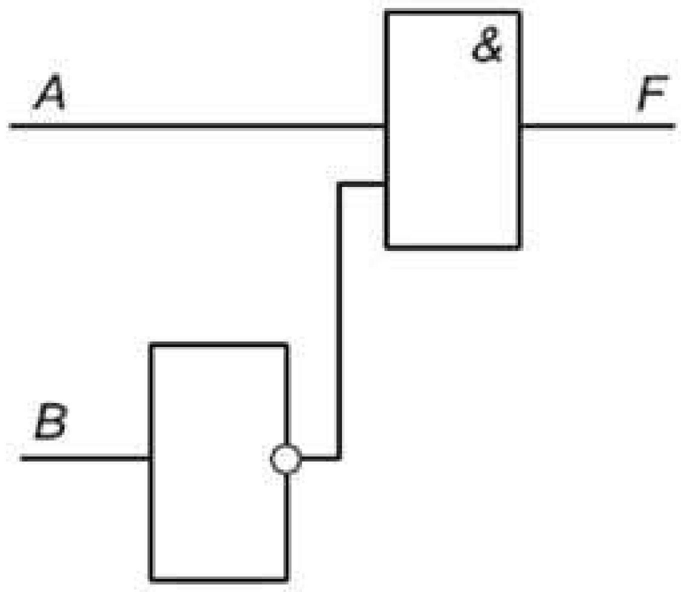
Логический элемент **И (конъюнктор)** реализует операцию логического умножения (рис. 1.5, *а*). Единица на выходе этого элемента появится только тогда, когда на всех входах будут единицы.

Логический элемент **ИЛИ (дизъюнктор)** реализует операцию логического сложения (рис. 1.5, *б*). Если хотя бы на одном входе будет единица, то на выходе элемента также будет единица.

Логический элемент **НЕ (инвертор)** реализует операцию отрицания (рис. 1.5, *в*). Если на входе элемента будет 0, то на выходе будет 1 и наоборот.

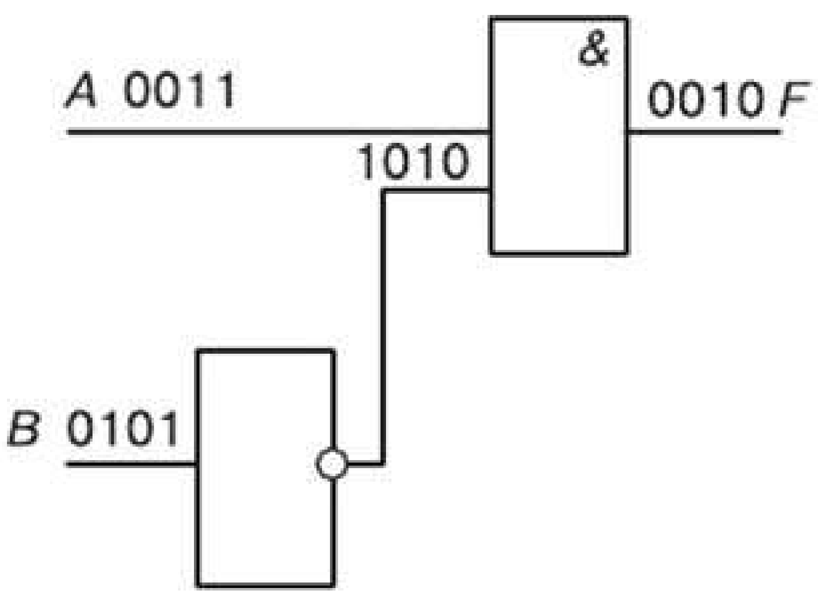
Компьютерные устройства, производящие операции над двоичными числами, и ячейки, хранящие данные, представляют собой электронные схемы, состоящие из отдельных логических элементов. Более подробно эти вопросы будут раскрыты в курсе информатики 10–11 классов.

Пример 3. Проанализируем электронную схему, т. е. выясним, какой сигнал будет на выходе F при каждом возможном наборе сигналов A и B на входах.



Решение

Все возможные комбинации сигналов A и B на входах внесём в таблицу истинности. Проследим преобразование каждой пары сигналов при прохождении их через логические элементы и запишем полученный результат в таблицу. Заполненная таблица истинности полностью описывает рассматриваемую электронную схему.



A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Таблицу истинности можно построить и по логическому выражению, соответствующему электронной схеме. Последний логический элемент в рассматриваемой схеме — конъюнктор. В него поступают сигналы от входа A и от инвертора. В свою очередь, в инвертор поступает сигнал от входа B. Таким образом: $F = A \& \overline{B}$.

www

Составить более полное представление о логических элементах и электронных схемах вам поможет работа с тренажёром «Логика» (**http://kpolyakov.narod.ru/prog/logic.htm**).

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Высказывание — это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.

Основные логические операции, определённые над высказываниями: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Название логической операции	Логическая связка	Обозначение
Инверсия	«не», «неверно, что»	$\neg$, $\overline{}$
Конъюнкция	«и», «а», «но», «хотя»	&, $\wedge$, $\cdot$
Дизъюнкция	«или»	$\vee$, +

Таблицы истинности для основных логических операций:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \& B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

При вычислении логических выражений сначала выполняются действия в скобках. Приоритет выполнения логических операций: $\neg$, &, $\vee$.

Вопросы и задания

1. Ознакомьтесь с материалами презентации к параграфу, содержащейся в электронном приложении к учебнику. Дополняет ли презентация информацию, содержащуюся в тексте параграфа?
2. Обсудите в группе, почему следующие предложения не являются высказываниями.
   а) Какого цвета этот дом?
   б) Число X не превосходит единицы.
   в) $4X + 3$.
   г) Посмотрите в окно.
   д) Пейте томатный сок!
   е) Эта тема скучна.
   ж) Рикки Мартин — самый популярный певец.
   з) Вы были в театре?
3. Приведите по одному примеру истинных и ложных высказываний из биологии, географии, информатики, истории, математики, литературы.
4. В следующих составных высказываниях выделите простые высказывания, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание.
   а) Число 376 чётное и трёхзначное.
   б) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
   в) Новый год мы встречаем на даче или на Красной площади.
   г) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
   д) Земля имеет форму шара, который из космоса кажется голубым.
   е) На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали самостоятельную работу.
5. Постройте отрицания следующих высказываний.
   а) Сегодня в театре идёт опера «Евгений Онегин».
   б) Каждый охотник желает знать, где сидит фазан.
   в) Число 1 есть простое число.
   г) Натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, не являются простыми числами.
   д) Неверно, что число 3 не является делителем числа 198.
   е) Коля решил все задания контрольной работы.

ж) Во всякой школе некоторые ученики интересуются спортом.

з) Некоторые млекопитающие не живут на суше.

6. Пусть A = «*Ане нравятся уроки математики*», а B = «*Ане нравятся уроки химии*». Выразите следующие логические выражения на обычном языке:

а) $A \& B$; г) $A \vee B$; ж) $\overline{(A \& B)}$;

б) $\overline{A} \& B$; д) $A \vee \overline{B}$; з) $\overline{(A \vee B)}$;

в) $A \& \overline{B}$; е) $\overline{A} \vee \overline{B}$; и) $\overline{(A \& \overline{B})}$.

7. Некоторый сегмент сети Интернет состоит из 1000 сайтов. Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов этого сегмента. Вот её фрагмент:

Ключевое слово	Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым
сомики	250
меченосцы	200
гуппи	500

По запросу *сомики & гуппи* было найдено 0 сайтов, по запросу *сомики & меченосцы* — 20 сайтов, а по запросу *меченосцы & гуппи* — 10 сайтов.

Сколько сайтов будет найдено по запросу *сомики* | *меченосцы* | *гуппи*?

Для скольких сайтов рассматриваемого сегмента ложно высказывание «*Сомики — ключевое слово сайта ИЛИ меченосцы — ключевое слово сайта ИЛИ гуппи — ключевое слово сайта*»?

8. Постройте таблицы истинности для следующих логических выражений:

а) $B \& (A \vee B)$;

б) $A \& (B \vee \overline{B})$;

в) $A \& (A \vee B \vee C)$;

г) $\overline{(A \vee B \vee \overline{C})}$.

9. Проведите доказательство рассмотренных в параграфе логических законов с помощью таблиц истинности.

10. Даны три числа в десятичной системе счисления: $A = 23$, $B = 19$, $C = 26$. Переведите A, B и C в двоичную систему счисления и выполните поразрядно логические операции $(A \vee B)\ \&\ C$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

11. Найдите значения выражений:
   а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;
   б) $(((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1)$;
   в) $(0\ \&\ 1)\ \&\ 1$;
   г) $1\ \&\ (1\ \&\ 1)\ \&\ 1$;
   д) $((1 \vee 0)\ \&\ (1\ \&\ 1))\ \&\ (0 \vee 1)$;
   е) $((1\ \&\ 1) \vee 0)\ \&\ (0 \vee 1)$;
   ж) $((0\ \&\ 0) \vee 0)\ \&\ (1 \vee 1)$;
   з) $(A \vee 1) \vee (B \vee 0)$;
   и) $((1\ \&\ A) \vee (B\ \&\ 0)) \vee 1$;
   к) $1\ \ A\ \&\ 0$.

12. Найдите значение логического выражения $\overline{(X < 3)}\ \&\ \overline{(X < 2)}$ для указанных значений числа X:
   а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

13. Пусть A = «*Первая буква имени — гласная*», B = «*Четвёртая буква имени согласная*». Найдите значение логического выражения $\overline{A} \vee B$ для следующих имён:
   а) ЕЛЕНА
   б) ВАДИМ
   в) АНТОН
   г) ФЁДОР

14. Разбирается дело Джона, Брауна и Смита. Известно, что один из них нашёл и утаил клад. На следствии каждый из подозреваемых сделал два заявления:

   Смит: «Я не делал этого. Браун сделал это».

   Джон: «Браун не виновен. Смит сделал это».

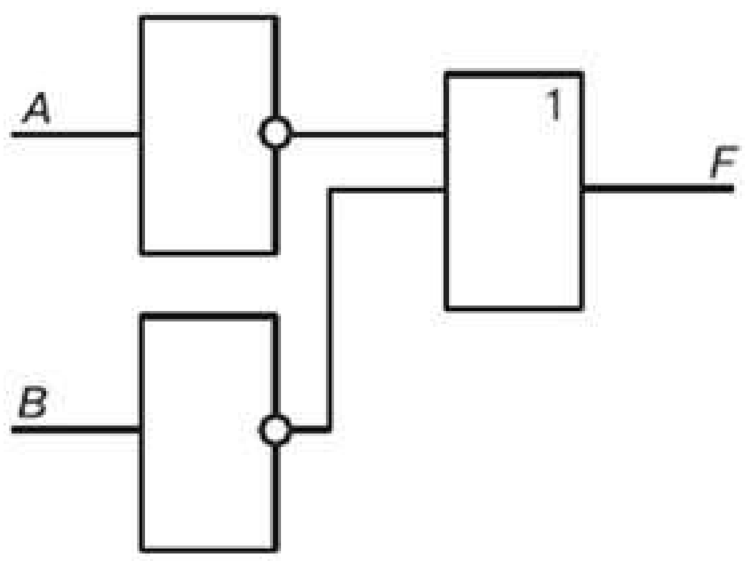
   Браун: «Я не делал этого. Джон не делал этого».

   Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал, один раз сказал правду. Кто из подозреваемых должен быть оправдан?

15. Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:
1) Алёша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V веке».
2) Боря: «Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке».
3) Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

16. Выясните, какой сигнал должен быть на выходе электронной схемы при каждом возможном наборе сигналов на входах. Составьте таблицу работы схемы. Каким логическим выражением описывается схема?



17. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $K = \{1, 3, 5\}$, $P = \{2, 4, 6, 7, 8\}$. Запишите с помощью фигурных скобок область истинности предложений:

а) $(x \in M)$ & $(x \in P)$;

б) $(x \in K) \vee (x \in P)$;

в) $x \in M \cap P$;

г) $x \in K \cup P$.

18. Попытайтесь провести аналогию между объектами и операциями алгебры множеств и алгебры высказываний. Обсудите этот вопрос в группе.

Тестовые задания для самоконтроля

1. Совокупность знаков, с помощью которых записываются числа, называется:
   а) системой счисления
   б) цифрами системы счисления
   в) алфавитом системы счисления
   г) основанием системы счисления

2. Чему равен результат сложения двух чисел, записанных римскими цифрами: MCM + LXVIII?
   а) 1168
   б) 1968
   в) 2168
   г) 1153

3. Число 301011 может существовать в системах счисления с основаниями:
   а) 2 и 10
   б) 4 и 3
   в) 4 и 8
   г) 2 и 4

4. Двоичное число 100110 в десятичной системе счисления записывается как:
   а) 36
   б) 38
   в) 37
   г) 46

5. В классе 110010_2% девочек и 1010_2 мальчиков. Сколько учеников в классе?
   а) 10
   б) 20
   в) 30
   г) 40

6. Сколько цифр 1 в двоичном представлении десятичного числа 15?
   а) 1
   б) 2
   в) 3
   г) 4

7. Чему равен результат сложения чисел 110_2 и 12_8?
   а) 6_{10}
   б) 10_{10}
   в) 10000_2
   г) 17_8

8. Ячейка памяти компьютера состоит из однородных элементов, называемых:
   а) кодами
   б) разрядами
   в) цифрами
   г) коэффициентами

9. Количество разрядов, занимаемых двухбайтовым числом, равно:
   а) 8
   б) 16
   в) 32
   г) 64

10. В знаковый разряд ячейки для отрицательных чисел заносится:
   а) +
   б) –
   в) 0
   г) 1

11. Вещественные числа представляются в компьютере в:
   а) естественной форме
   б) развёрнутой форме
   в) экспоненциальной форме с нормализованной мантиссой
   г) виде обыкновенной дроби

12. На рисунке изображены отрезки AC и BC.

   Укажите объединение этих отрезков:
   а) AB
   б) AC
   в) AD
   г) BC
   д) CD

13. Сколько разных восьмибуквенных слов можно составить в алфавите из двух символов?
   а) 8
   б) 64
   в) 256
   г) Бесконечно много

14. Какое предложение НЕ является высказыванием?
   а) Никакая причина не извиняет невежливость.
   б) Обязательно стань отличником.
   в) Логика — наука о законах и формах человеческого мышления.
   г) $1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

15. Какое высказывание является ложным?
   а) Знаком $\vee$ обозначается логическая операция ИЛИ.
   б) Логическую операцию ИЛИ также называют логическим сложением.
   в) Дизъюнкцию также называют логическим сложением.
   г) Знаком $\vee$ обозначается логическая операция конъюнкция.

16. Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание $((X < 5) \vee (X < 3)) \wedge ((X < 2) \vee (X < 1))$?
   а) 1
   б) 2
   в) 3
   г) 4

17. Для какого символьного выражения верно высказывание: «*НЕ* (*Первая буква согласная*) *И НЕ* (*Вторая буква гласная*)»?
а) abcde
б) bcade
в) babas
г) cabab

18. Некоторый сегмент сети Интернет состоит из 1000 сайтов. Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов этого сегмента. Вот её фрагмент:

Ключевое слово	Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым
сканер	200
принтер	250
монитор	450

Сколько сайтов будет найдено по запросу *принтер* | *сканер* | *монитор*, если по запросу *принтер* | *сканер* было найдено 450 сайтов, по запросу *принтер* & *монитор* — 40, а по запросу *сканер* & *монитор* — 50?
а) 900
б) 540
в) 460
г) 810

19. Какому логическому выражению соответствует следующая таблица истинности?

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

а) $A \& B$
б) $A \vee B$
в) $\overline{A \& B}$
г) $\overline{A} \& \overline{B}$

20. Когда сломался компьютер, его хозяин сказал: «Оперативная память не могла выйти из строя». Сын хозяина компьютера предположил, что вышел из строя процессор, а жёсткий диск исправен. Пришедший специалист по обслуживанию сказал, что, скорее всего, с процессором всё в порядке, а оперативная память неисправна. В результате оказалось, что двое из них сказали всё верно, а третий — всё неверно. Что же сломалось?

а) оперативная память

б) процессор

в) жёсткий диск

г) процессор и оперативная память

21. На перекрёстке произошло дорожно-транспортное происшествие, в котором участвовали автобус (*А*), грузовик (*Г*), легковой автомобиль (*Л*) и маршрутное такси (*М*). Свидетели происшествия дали следующие показания. Первый свидетель считал, что первым на перекрёсток выехал автобус, а маршрутное такси было вторым. Другой свидетель полагал, что последним на перекрёсток выехал легковой автомобиль, а вторым был грузовик. Третий свидетель уверял, что автобус выехал на перекрёсток вторым, а следом за ним — легковой автомобиль. В результате оказалось, что каждый из свидетелей был прав только в одном из своих утверждений. В каком порядке выехали машины на перекрёсток? В вариантах ответов перечислены подряд без пробелов первые буквы названий транспортных средств в порядке их выезда на перекрёсток:

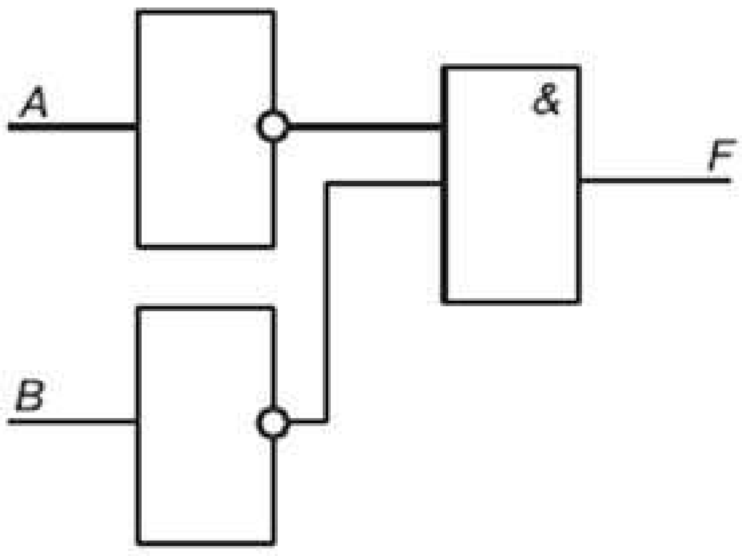
а) АМЛГ

б) АГЛМ

в) ГЛМА

г) МЛГА

22. Какое логическое выражение соответствует следующей схеме?



а) $A \& B$
б) $A \vee B$
в) $\overline{A \& B}$
г) $\overline{A} \& \overline{B}$

Для проверки знаний и умений по теме «Математические основы информатики» вы можете воспользоваться интерактивным тестом к главе 1, содержащимся в электронном приложении к учебнику.